






# Computergraphik

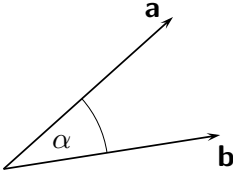
## Kurze Wdhg. Mathematik

G. Zachmann  
 Clausthal University, Germany  
[zach@in.tu-clausthal.de](mailto:zach@in.tu-clausthal.de)

## Vektoren

- Notation: Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$


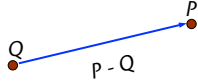
- Betrag:  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$
- Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 4

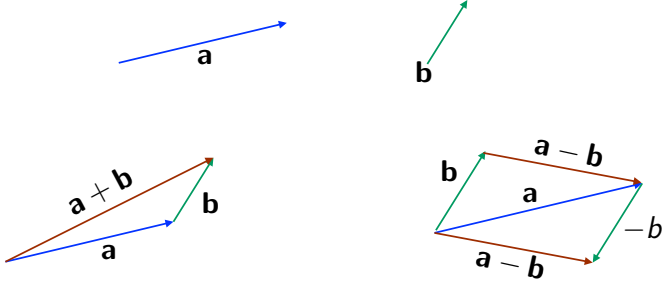
## Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: **Punkt**  $\neq$  **Vektor** !
- Unterschiede:
  - Punkt = Ort im Raum
  - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator
- Merkgeln:
  - Punkt + Vektor = Punkt
  - Vektor + Vektor = Vektor
  - Punkt - Punkt = Vektor (Notation:  $\overline{QP}$ )
  - Punkt + Punkt = **undefiniert!**
  - Korrespondenz mittels Ursprungspunkt  $O$ :
 
$$\mathbf{p} = P - O \quad P = O + \mathbf{p}$$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 5

## Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und -Subtraktion:



Addition Subtraktion

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 6

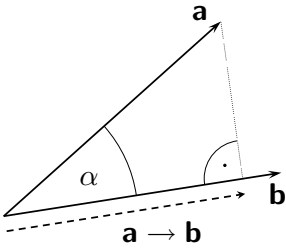
## Terminologie

- **Orthogonal** = senkrecht zueinander
- Drei Vektoren sind **koplanar**  $\Leftrightarrow$   
es gibt eine Ebene die alle drei Vektoren enthält
- Persönliche Konvention auf den Folien: **Begriffe**, die neu definiert werden, werden mit **grüner** Schrift geschrieben

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 7

## Senkrechte Projektion

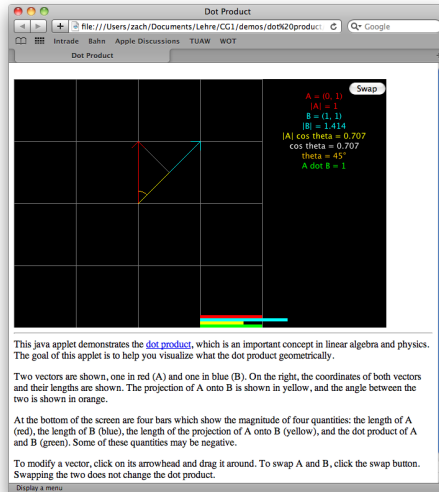
- Senkrechte Projektion:

$$|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$


- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt lässt sich als senkrechte Projektion auf einen Einheitsvektor interpretieren;  
d.h., falls  $|\mathbf{b}| = 1$   
dann ist  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}|$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 8

## Demo zum Skalarprodukt (dot product)



This java applet demonstrates the **dot product**, which is an important concept in linear algebra and physics. The goal of this applet is to help you visualize what the dot product geometrically.

Two vectors are shown, one in red (A) and one in blue (B). On the right, the coordinates of both vectors and their lengths are shown. The projection of A onto B is shown in yellow, and the angle between the two is shown in orange.

At the bottom of the screen are four bars which show the magnitude of four quantities: the length of A (red), the length of B (blue), the length of the projection of A onto B (yellow), and the dot product of A and B (green). Some of these quantities may be negative.

To modify a vector, click on its arrowhead and drag it around. To swap A and B, click the swap button. Swapping the two does not change the dot product.

Display a menu

<http://www.falstad.com/dotproduct/>

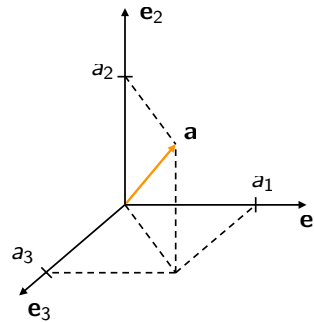
## Darstellung eines Vektors bzgl. beliebiger Basis

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$



$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

## Identitäten für das Skalarprodukt

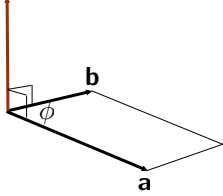
- Schwarz-Ungleichung:
 
$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$
- Dreiecksungleichung:
 
$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 11

## Das Kreuzprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms:
 
$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$
- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (dazu später)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 12

Demo

<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 13

▪ Eselsbrücke: Rechte-Hand-Regeln

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 15

▪ Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{antikommutativ, schiefsymmetrisch})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

▪ Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben

▪ Definiere dazu die zum Vektor  $\mathbf{a}$  duale (schiefsymmetrische) Matrix  $\mathbf{a}^\times$ :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^\times \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 16

▪ Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

▪ Es gilt die **Jacobi-Identität**:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

▪ Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

▪ Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 17

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:
  - $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$   
aber  
 $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b}^\times \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}^\times) \cdot \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$   
aber  
 $\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$
  - Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix  $\mathbf{a}^\times$  gilt die Assoziativität!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 18

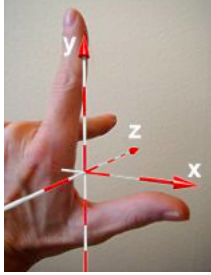
### Das Tripel-Kreuzprodukt

- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:
 
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$
- Heißt auch "*triple product expansion*", "*triple cross product identity*" oder **Graßmann-Identität** oder **Graßmannscher Entwicklungssatz**
  - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
  - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 19

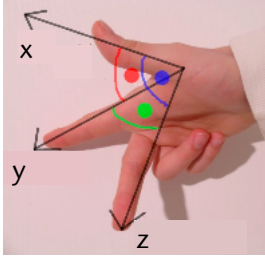


## 3D-Koordinatensysteme



A photograph of a left hand with a 3D coordinate system overlaid. The thumb points up and is labeled 'y'. The index finger points right and is labeled 'x'. The middle finger points forward and is labeled 'z'.

left handed system  
(Linkssystem)



A photograph of a right hand with a 3D coordinate system overlaid. The index finger points up and is labeled 'x'. The middle finger points right and is labeled 'y'. The thumb points forward and is labeled 'z'.

right handed system  
(Rechtssystem)

Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (es sei denn, es steht etwas anderes da)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 20